

Conocimientos previos

Imagen

Recorrido

Función

Pares
ordenados

Biyectiva

Sobreyectiva

Inyectiva

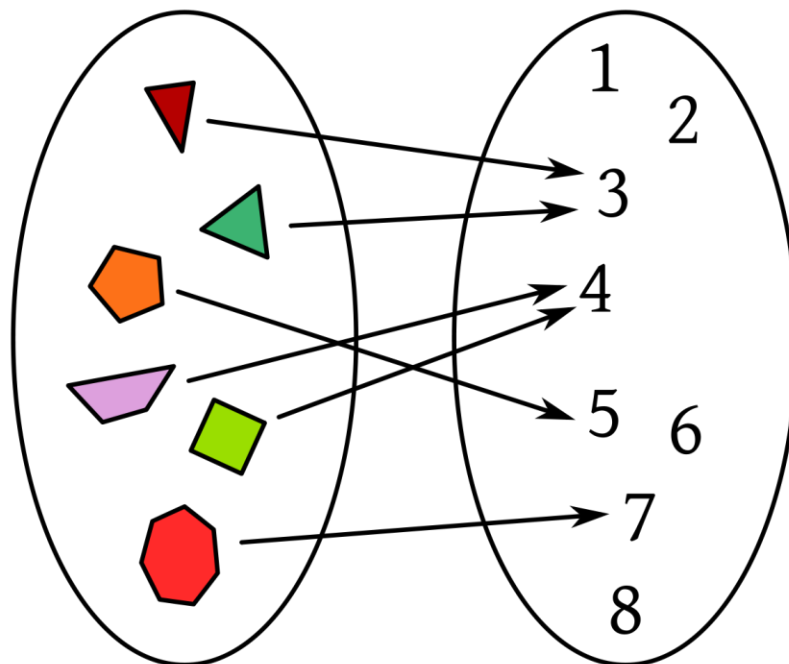
Gráfico

Diagrama
Sagital

Relación

Dominio

Preimagen



Relaciones y
funciones



**Instituto
Claret**

Relaciones y funciones

Par ordenado

Conjunto de dos elementos, tal que al elemento de la izquierda se le denomina primera componente y al de la derecha se le denomina segunda componente. Notación: (a, b)

Producto cartesiano

Se define como **producto cartesiano** entre dos conjuntos, no vacíos, A y B al conjunto de todos los pares ordenados que tienen como primera componente a un elemento de A y como segunda componente a un elemento de B.

Notación:

- Ejemplo: sea $A = \{1, 2\}$ y $B = \{3, 4\}$, entonces

$$A \times B = \{(1, 3); (1, 4); (2, 3); (2, 4)\}$$

Relación

- R es una relación “de A a B” si y solo si R es subconjunto de $A \times B$.
- R es una relación “en A” si y solo si R es subconjunto de $A \times A$.

Ejemplo: sea $A = \{1, 2, 3\}$ la Relación en A definida como:

$R = \{(a, b) \in A \times A / a + b \leq 4\}$, se tiene como resultado

$R = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (2, 1); (2, 2); (3, 1)\}$

Observaciones:

1) Si en una relación R un elemento a está relacionado con otro elemento b , esto se simboliza de dos formas:

i) $(a, b) \in R$

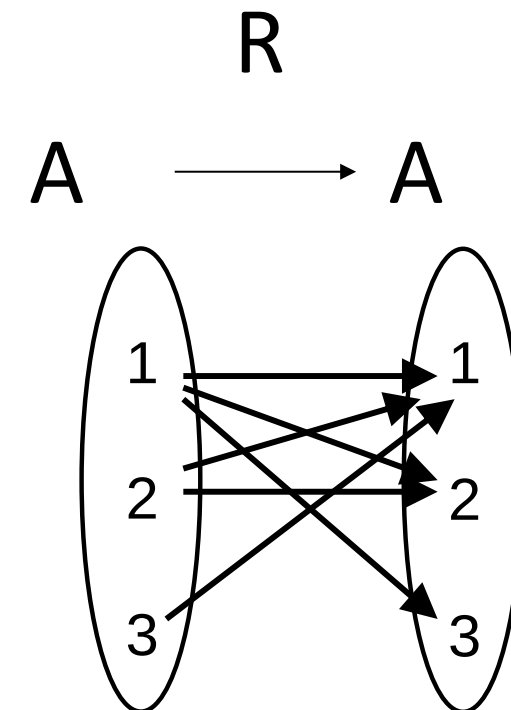
ii) $a R b$

Se dice que “ b ” es la **imagen** de “ a ” bajo la relación R , o bien que “ a ” es la **pre-imagen** de “ b ” bajo la relación R .

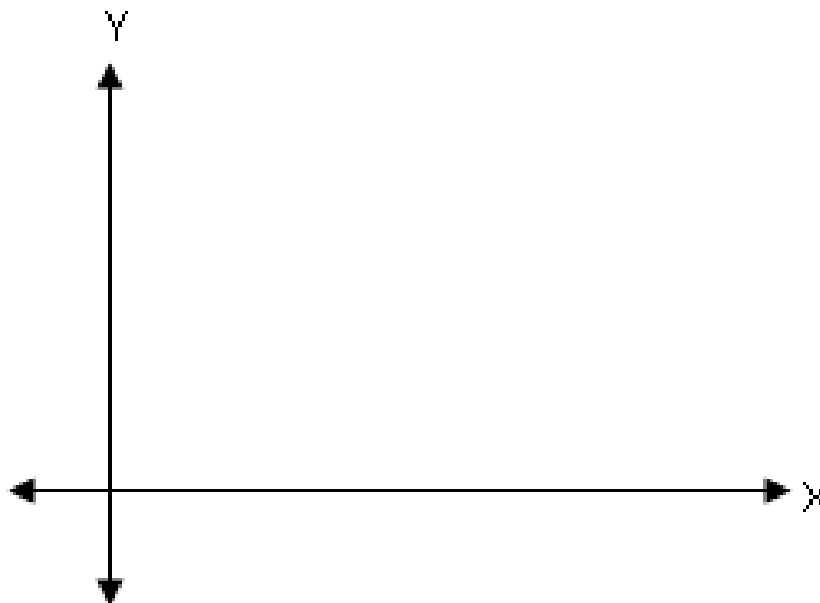
2) Si la relación R está definida de A a B , A se llama ***conjunto de partida*** y B se llama ***conjunto de llegada***.

Representaciones gráficas de una relación: existen dos formas de graficar una relación, y estas son:

1) Diagrama Sagital (o de flechas):



2) Plano Cartesiano



Dominio de una relación: En una relación de A a B se llama dominio de la relación al conjunto de todos los elementos de A que son pre-imagen de algún elemento de B.

$$\text{Notación: } \text{Dom } (R) = \{a \in A / a R b, b \in B\}$$

Recorrido de una relación: En una relación de A a B se llama recorrido de la relación al conjunto de todos los elementos de B que son imagen de algún elemento de A.

$$\text{Notación: } \text{Rec } (R) = \{b \in B / a R b, a \in A\}$$

Ejemplo

Sea $R = \{(1, 9); (2, 8); (3, 7); (4, 6)\}$, entonces

$\text{Dom}(R) = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\text{Rec}(R) = \{6, 7, 8, 9\}$

Relación Inversa: Se define la relación inversa de una relación R a la siguiente relación:

$R^{-1} = \{(y, x) / (x, y) \in R\}$ o bien $(y, x) \in R^{-1}$ si y solo si $(x, y) \in R$.

Ejemplo: Sea $R = \{(1, 2); (3, 6); (4, 2)\}$

entonces $R^{-1} = \{(2, 1); (6, 3); (2, 4)\}$

Función

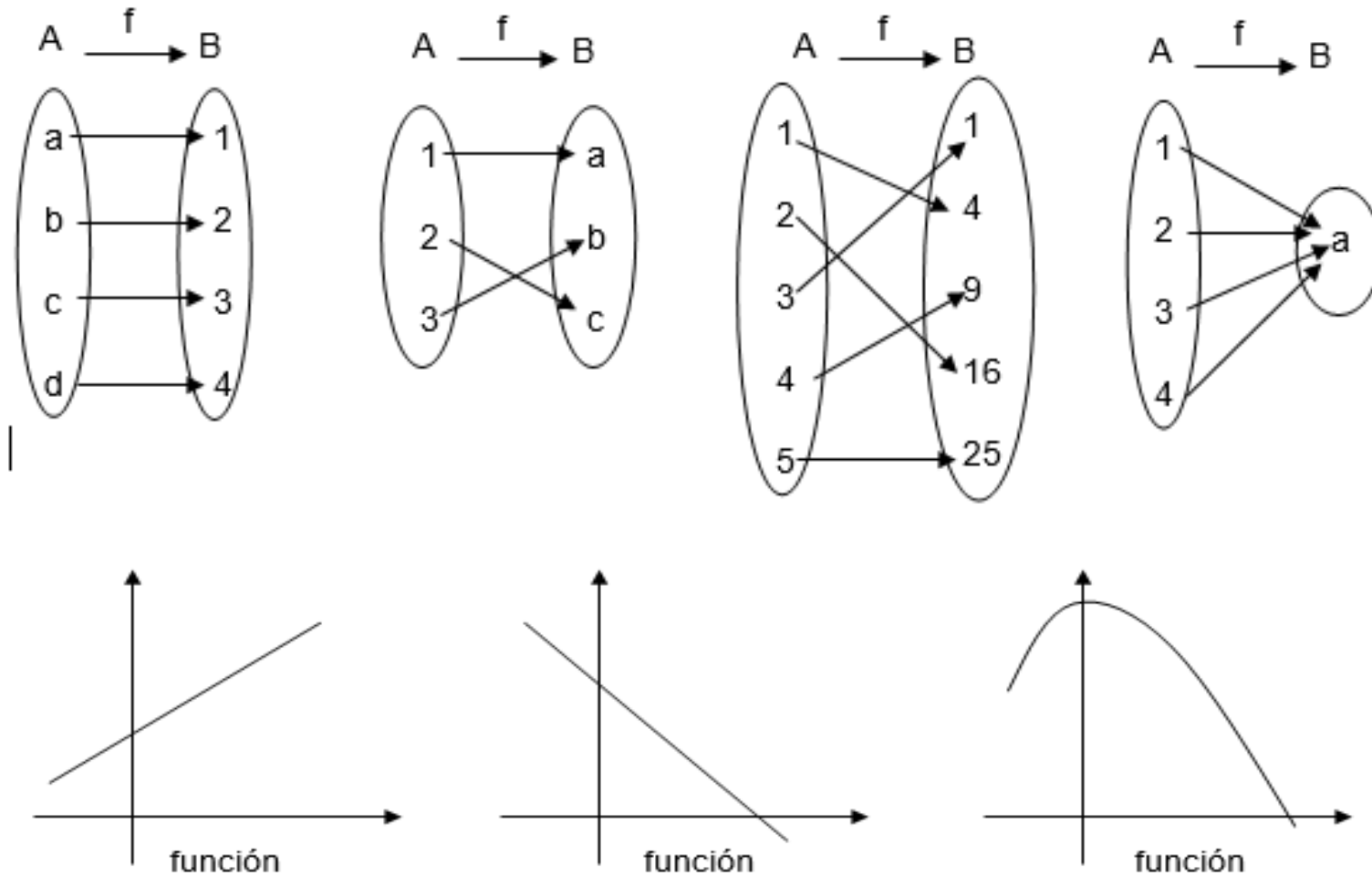
Una función es una relación en que a cada elemento del conjunto de partida le corresponde un único elemento del conjunto de llegada. Notación: $f : A \rightarrow B$ (se lee f es función de A en B).

f es una función de A en B , $f : A \rightarrow B$ (si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

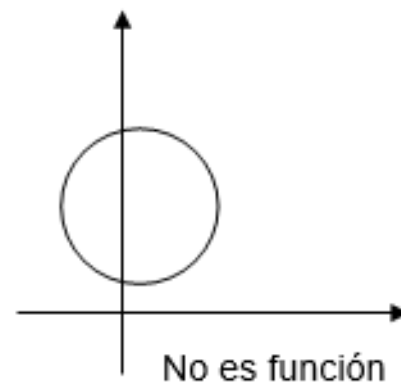
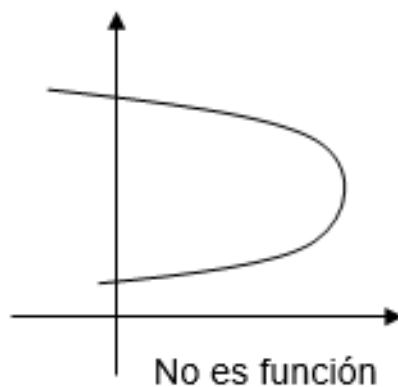
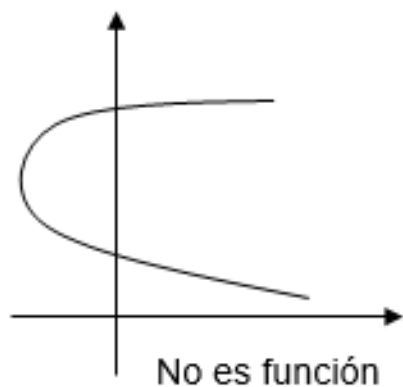
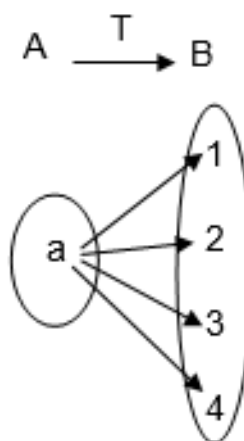
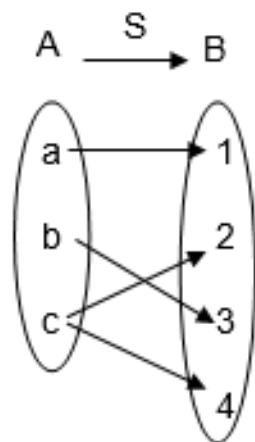
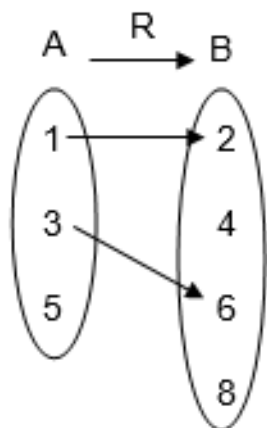
- i) $\forall a \in A, \exists b \in B / (a, b) \in f$, o bien $f(a) = b$
- ii) Si $(a, b) \in f$ y $(a, c) \in f$, entonces $b = c$.

Observación: Si una función f asocia un elemento $a \in A$ con un elemento $b \in B$, se dice que “ b es la imagen de a ” según f , lo que simbolizamos como: $f(a) = b$ (se lee f de a es igual b).

Ejemplos de funciones



No son funciones...



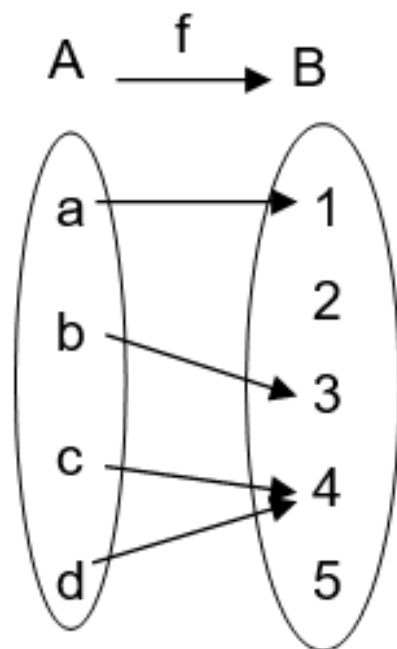
Dominio y recorrido de una función

Dominio: Como toda función es a su vez una relación, se define el dominio de una función como el conjunto de todos los elementos de A que son pre-imagen de algún elemento de B.

Por definición, el dominio de una función corresponde a todo el conjunto de partida, esto es: $\text{Dom}(f) = A$.

Recorrido: Sea $f: A \rightarrow B$ una función, el recorrido de la función f es un subconjunto del conjunto B, cuyos elementos son imagen de algún elemento de A. $\text{Rec}(f) = \{b \in B / \exists a \in A, f(a) = b\}$

Ejemplo



$$\text{Dom}(f) = \{a, b, c, d\} = A$$

$$\text{Rec}(f) = \{1, 3, 4\}$$

$$f(a) = 1$$

$$f(b) = 3$$

$$f(c) = 4$$

$$f(d) = 4$$

Valoración de expresiones algebraicas

Consiste en asignar un valor numérico a cada variable que aparece en la expresión y resolver las operaciones aritméticas que correspondan.

Ejemplo: Si en la expresión $2x^2 + 3x^3 + (4x)^3 + 5x^5$ $x = -1$ resulta:

$$\begin{aligned} & 2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1)^3 + (4 \cdot -1)^3 + 5 \cdot (-1)^5 \\ & 2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1)^3 + (-4)^3 + 5 \cdot (-1)^5 \\ & 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) - 64 + 5 \cdot -1 \\ & 2 - 3 - 64 - 5 \\ & -70 \end{aligned}$$

Luego, para $x = -1$, $2x^2 + 3x^3 + (4x)^3 + 5x^5$ es -70

Valoración de expresiones algebraicas

Determine el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas:

1. $x^2 - 3x + 2$ para $x = -1$

2. $abc^2 - 2a$ para $a = 2, b = -1$ y $c = 0$

3. $x - y^3z$ para $x = 1/3, y = -2$ y $z = 1,2$

Imágenes de una función

Dadas las siguientes funciones determine las imágenes que se piden:

$$f(x) = 2x^2 - 3$$

$$g(x) = 3x - 5$$

$$h(x) = x^3 + 7x$$

1. $h(2) =$

3. $f(1/2)$

2. $g(-3) =$

4. $h(-1) + g(4)$

Composición de funciones

Sean las funciones $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$, la función $h : A \rightarrow C$ definida por $h(x) = g(f(x))$ se denomina composición de las funciones f y g , y se simboliza por: $h = (g \circ f)$.

Nota: $g(f(x)) = (g \circ f)(x)$.

Composición de funciones

Ejemplo:

Sean $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 2$, entonces las siguientes corresponden a funciones composición:

$$\begin{aligned}\text{i) } (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x^2) \\ &= x^2 + 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ii) } (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x + 2) \\ &= (x + 2)^2 \\ &= x^2 + 4x + 4\end{aligned}$$

- Observaciones:
- 1) $(g \circ f) \neq (f \circ g)$, es decir la composición de funciones no es conmutativa.
- 2) La condición única y necesaria para que exista la composición de funciones $g \circ f$ es que el recorrido de f sea un subconjunto o igual al dominio de g .



**Instituto
Claret**

*Artesanos de la vida,
al servicio de la Educación*